Proseminar zur Analysis

Aloys Krieg

RWTH Aachen

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Im Rahmen des Proseminars zur Analysis sollen die Studierenden neue mathematische Sachverhalte selbstständig bearbeiten und präsentieren. Vorausgesetzt werden Kenntnisse der Analysis I sowie im Laufe des Proseminars auch die parallel zu erwerbenden Kenntnisse der Analysis II und der Linearen Algebra I.

In §1 gehen wir der Frage nach, wie man den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

die wir bereits als konvergent erkannt hatten, konkret bestimmen kann. In §2 leiten wir eine geschlossene Formel für Potenzsummen

$$\sum_{k=1}^{N} k^n = P_n(N) \quad \text{für alle } \; N \in \mathbb{N}$$

mit einem explizit bestimmbaren Polynom $P_n(X)$ vom Grad $n+1$ her.

In den folgenden Paragrafen lernen wir spezielle Klassen von Polynomen kennen, die zum Teil aus der Physik kommen. Den Abschluss bildet ein "reeller" Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

§1 Die Partialbruchentwicklung des Cotangens

Vorausgesetzt werden in diesem Paragrafen lediglich Kenntnisse der Analysis I. Das Ziel ist die Bestimmung der Partialbruchentwicklung des Cotangens. Als Anwendung liefern wir eine Berechnung der Werte

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

der RIEMANNschen Zetafunktion, die in der Analysis I (vgl. III(2.5)) offen geblieben war.

Gemäß IV(5.8) war der *Cotangens* definiert durch

$$\cot : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

(1.1) Lemma. *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi/2)$ gilt die Verdopplungsformel*

$$2 \cdot \cot(2z) = \cot z + \cot(z + \pi/2).$$

Beweis. Gemäß IV(5.9) gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi/2)$

$$\begin{aligned} \cot z + \cot(z+\pi/2) &= \cot z + \tan(-z) = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{\sin z}{\cos z} \\ &= \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\sin z \cdot \cos z} = 2 \cdot \frac{\cos(2z)}{\sin(2z)} = 2 \cdot \cot(2z), \end{aligned}$$

wenn man die Additionstheoreme in III(3.6) verwendet. □

Als Anwendung formulieren wir das

(1.2) Lemma. *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \pi \cot(\pi x),$$

hat die folgenden Eigenschaften

a) f *ist stetig.*

b) $f(x+1) = f(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

c) $2f(x) = f(x/2) + f\big((x+1)/2\big)$ *für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

d) $\lim_{x \to 0} \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) = 0$.

Beweis. a) Die Aussage folgt aus der Stetigkeit des Cotangens.
b) Die Behauptung folgt aus der π-Periodizität des Cotangens nach IV(5.9).
c) Man verwende (1.1).
d) Mit der Regel von L'Hospital V(2.12) ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi\cdot\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}-\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi x\cdot\cos(\pi x)-\sin(\pi x)}{x\cdot\sin(\pi x)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\pi^2 x\cdot\sin(\pi x)}{\sin(\pi x)+\pi x\cdot\cos(\pi x)}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-\pi^2\cdot\sin(\pi x)-\pi^3 x\cdot\cos(\pi x)}{\cos(\pi x)+\pi\cdot\cos(\pi x)-\pi^2 x\cdot\sin(\pi x)}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Wir konstruieren nun eine weitere Funktion mit dieser Eigenschaft. Dazu sei

$$s_N(x) := \sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{x+k},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\quad N\in\mathbb{N}.$$

(1.3) Satz. *Die Reihe*

$$s(x)=\lim_{N\to\infty}s_N(x)=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-k^2}$$

konvergiert absolut auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ und erfüllt die folgenden Eigenschaften:

a) s ist stetig.

b) $s(x+1)=s(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

c) $2s(x)=s(x/2)+s\big((x+1)/2\big)$ für alle $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

d) $\lim_{x\to 0}\big(s(x)-\frac{1}{x}\big)=0$.

Beweis. Man hat zunächst

$$s_N(x)=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x-k}\right)=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{N}\frac{2x}{x^2-k^2}\,.$$

Für $|x|\le N$, $k\ge 2N$ hat man

$$|x^2-k^2|=k^2-|x|^2\ge k^2-(k/2)^2=3k^2/4.$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x|}{k^2}$$

eine konvergente Majorante auf $[-N, N]$.
a) Für $|x|, |y| \leq N$ und $k \geq 2N$ hat man

$$\left|\frac{2x}{x^2-k^2} - \frac{2y}{y^2-k^2}\right| = \frac{2|xy+k^2| \cdot |x-y|}{|x^2-k^2| \cdot |y^2-k^2|} \leq \frac{5k^2/2}{(3k^2/4)\cdot(3k^2/4)} \cdot |x-y| = \frac{40}{9k^2}|x-y|,$$

also

$$|s(x)-s(y)| \leq |s_{2N}(x) - s_{2N}(y)| + |x-y|\,\frac{40}{9}\sum_{k=2N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Weil $s_{2N}(x)$ als rationale Funktion auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ stetig ist, folgt die Stetigkeit von $s(x)$ auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ aus der LIPSCHITZ-Bedingung.
b) Für $N \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ gilt

$$s_N(x+1) = \sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{x+1+k} = \left(\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{x+k}\right) + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N},$$

also

$$s(x+1) = \lim_{N\to\infty} s_N(x+1) = \lim_{N\to\infty}\left(s_N(x) + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N}\right) = s(x).$$

c) Aus

$$\frac{1}{\frac{x}{2}+k} + \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k} = \frac{2}{x+2k} + \frac{2}{x+2k+1}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} s\left(\frac{x}{2}\right) + s\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{\frac{x}{2}+k} + \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k}\right) \\ &= 2\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{x+2k} + \frac{1}{x+2k+1}\right) \\ &= 2\lim_{N\to\infty}\left(s_{2N}(x) + \frac{1}{x+2N+1}\right) = 2\cdot s(x). \end{aligned}$$

d) Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt $|x^2-k^2| \geq k^2 - \frac{k^2}{4} = 3k^2/4$, $k \in \mathbb{N}$, also

$$\left|s(x) - \frac{1}{x}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-k^2}\right| \leq \frac{8}{3}|x|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Es folgt

$$\lim_{x\to 0}\left(s(x) - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

□

Im nächsten Schritt untersuchen wir die Eindeutigkeit.

(1.4) Eindeutigkeitssatz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit den Eigenschaften*

(i) $f(x+1) = f(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $2 \cdot f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Dann ist f konstant.

Beweis. Indem man ggf. f durch $f - f(0)$ ersetzt, darf man ohne Einschränkung $f(0) = 0$ annehmen. Weil $[0,1]$ kompakt ist, liefert (i)

$$m := \sup\big\{|f(x)|;\ x \in \mathbb{R}\big\} = \sup\big\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\big\} < \infty$$

und es existiert ein $a \in [0,1]$ mit $|f(a)| = m$. Also ist

$$a \in M := \big\{y \in \mathbb{R};\ |f(y)| = m\big\}.$$

Für $y \in M$ gilt nach (ii)

$$m = |f(y)| = \frac{1}{2}\left|f\left(\frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{y+1}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|f\left(\frac{y}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{y+1}{2}\right)\right|\right) \le \frac{1}{2}(m+m) = m.$$

Also steht überall „$=$“ und somit

$$\frac{y}{2} \in M, \quad \frac{y+1}{2} \in M.$$

Mit einer Induktion folgert man $a/2^k \in M$. Mit der Stetigkeit von f folgt

$$0 = |f(0)| = \lim_{k\to\infty} \big|f(a/2^k)\big| = m,$$

also $f \equiv 0$. □

Als Folgerung notieren wir den

(1.5) Satz von der Partialbruchentwicklung des Cotangens. *Für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ gilt*

$$\pi\cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}.$$

Beweis. Sei

$$f : \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \pi\cot(\pi x) - s(x).$$

Nach (1.2) und (1.3) erfüllt f die Bedingungen (i) und (ii) aus (1.4) auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Wegen

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty}\Big(\big(\pi\cot(\pi x) - \tfrac{1}{x}\big) - \big(s(x) - \tfrac{1}{x}\big)\Big) = 0$$

kann man f durch $f(k) := 0$ für $k + \mathbb{Z}$ zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}$ fortsetzen, die die Voraussetzungen von (1.4) erfüllt. Dann liefert (1.4) auch $f \equiv 0$ und somit die Behauptung. □

Mit der aus der Analysis I bekannten RIEMANN*schen Zetafunktion*

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad s \geq 2$$

erhält man das

(1.6) Korollar. *Für alle $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ gilt*

$$\pi x \cdot \cot(\pi x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^{2n}.$$

Beweis. Da man wegen der absoluten Konvergenz beliebig umordnen darf, folgt aus (1.5) mit der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
\pi x \cdot \cot(\pi x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - k^2} = 1 - 2x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{1-(x/k)^2} \\
&= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n} \\
&= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}\right) x^{2n} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^{2n}.
\end{aligned}$$

$\square$

Nach V(1.11) gilt $\cot' x = -1 - \cot^2 x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$. Damit verifiziert man das

(1.7) Lemma. *Die Funktion*

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \pi x \cdot \cot(\pi x),$$

erfüllt die Differentialgleichung

$$x \cdot f'(x) = f(x) - f(x)^2 - \pi^2 x^2.$$

Setzt man auf beiden Seiten die Potenzreihenentwicklung aus (1.6) ein und vergleicht die Koeffizienten von x^{2n}, $n \in \mathbb{N}$, so folgt das

(1.8) Korollar. *Es gilt*

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\left(n + \tfrac{1}{2}\right) \zeta(2n) = \sum_{\substack{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ k+l=n}} \zeta(2k) \cdot \zeta(2l),$$

insbesondere

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$

Mit einer Induktion nach n folgt aus (1.8) das

(1.9) Korollar. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\zeta(2n) \in \mathbb{Q} \cdot \pi^{2n}.$$

Über den arithmetischen Charakter der Werte $\zeta(2n+1)$ ist nicht viel bekannt, außer dass $\zeta(3)$ irrational ist.

§2 BERNOULLIsche Zahlen und Polynome

Ziel dieses Paragrafen ist es, die Werte der RIEMANNschen Zetafunktion genauer zu untersuchen. Dabei taucht in kanonischer Weise eine Klasse von Polynomen auf, die so genannten BERNOULLIschen Polynome.

Wir beginnen mit einer etwas ungewöhnlichen Definition, deren Motivation aber bald klar wird.

(2.1) Definition. Die BERNOULLI*schen Zahlen* sind definiert durch

$$B_0 := 1, \quad B_1 := -\frac{1}{2}, \quad B_{2n+1} := 0, \quad B_{2n} := (-1)^{n+1}\, 2 \cdot (2n)! \frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus §1 wiederholen wir im Wesentlichen das

(2.2) Lemma. *Es gilt*

a) $B_n \in \mathbb{Q}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

b) $|B_n| \leq \dfrac{4 \cdot n!}{(2\pi)^n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\dfrac{2 \cdot n!}{(2\pi)^n} \leq |B_n|$ *für alle geraden* $n \in \mathbb{N}$.

c) $(-1)^{n+1} B_{2n} > 0$ *und*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{2(2n)!} (2\pi)^{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Man verwende (2.1), (1.9) sowie

$$1 \leq \zeta(2n) \leq \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \leq 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

□

Die BERNOULLIsche Zahlen treten als Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung einer einfachen Funktion auf.

(2.3) Lemma. *Die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, t^n$$

hat den Konvergenzradius 2π *und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, t^n = \frac{t}{e^t - 1} \quad \text{für alle } 0 < |t| < 2\pi.$$

Beweis. Den Konvergenzradius berechnet man aus (2.2) b) mit der geometrischen Reihe als Majorante und Minorante. Mit (2.1) und (1.6) berechnet man für $0 < |t| < 2\pi$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, t^n &= 1 - \tfrac{1}{2}t - 2\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) \left(\frac{it}{2\pi}\right)^{2n} \\ &= -\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}it\cot(it/2) = -\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}t\,\frac{e^{-t/2} + e^{t/2}}{e^{-t/2} - e^{t/2}} \\ &= -t\,\frac{e^{-t/2}}{e^{-t/2} - e^{t/2}} = \frac{t}{e^t - 1}.\end{aligned}$$

□

Daraus entwickeln wir eine Rekursionsformel.

(2.4) Korollar. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

Beweis. Aus (2.3) folgt für $0 < |t| < 2\pi$

$$\begin{aligned} t &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\, t^k\right) \cdot \left(e^t - 1\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\, t^k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\, t^k\right) \\ &= t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n+1-k)!}\, B_k\right) t^{n+1}.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung. □

Mit Hilfe dieses Korollars kann man die Bernoullischen Zahlen rekursiv berechnen. Auf diese Weise kommt man auch leichter zu den Werten $\zeta(2n)$ als über die quadratische Rekursionsformel in (1.8). Wir vermerken die konkreten Werte

(1) $$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

(2.5) Definition. Die Bernoulli*schen Polynome* $B_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ sind definiert durch

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}\, x^k \in \mathbb{Q}[x].$$

$B_n(x)$ ist ein normiertes Polynom vom Grad n. Mit (2.1) und den obigen Werten (1) folgert man

(2) $B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$
$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \quad B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x}{6}.$

(2.6) Satz. *Es gilt*

a) $B_n(0) = B_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

b) $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}$, $|t| < 2\pi$.

d) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

e) $B_n(1) = B_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

f) $B_n(x+1) = B_n(x) + nx^{n-1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. a) Die Aussage folgt aus (2.5).
b) Es gilt

$$B_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} B_{n-k}\, x^{k-1} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-1-(k-1)}\, x^{k-1} = nB_{n-1}(x).$$

c) Mit (2.3) erhält man für $|t| < 2\pi$

$$\begin{aligned} \frac{te^{xt}}{e^t - 1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} t^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{x^k}{k!} \right) t^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n. \end{aligned}$$

d) Mit c) erhält man für $|t| < 2\pi$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-x)}{n!} t^n = \frac{te^{(1-x)t}}{e^t - 1} = \frac{te^{-xt}}{1 - e^{-t}} = \frac{(-t)e^{x(-t)}}{e^{-t} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (-t)^n.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

e) Man verwende d), a) sowie $B_n = 0$ für alle ungeraden $n \neq 1$ nach (2.1).
f) Mit c) ergibt sich für $|t| < 2\pi$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} t^n = \frac{te^{(x+1)t}}{e^t - 1} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} + te^{xt} = B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(B_n(x) + nx^{n-1}\big) \frac{t^n}{n!}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung. □

Wir erinnern uns an die Formeln

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{N} k^2 = \tfrac{1}{6}N(N+1)(2N+1).$$

Mit Hilfe der BERNOULLIschen Polynome können wir nun die allgemeine Potenzsumme ausdrücken. Die Summe der n-ten Potenzen lässt sich durch ein Polynom vom Grad $n+1$ explizit ausdrücken.

(2.7) Satz. *Für alle $n, N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{1}{n+1}\big(B_{n+1}(N) - B_{n+1}(0)\big) = \frac{N^{n+1}}{n+1} + \tfrac{1}{2}N^n + \frac{1}{n+1}\sum_{1\le j\le \frac{n}{2}} \binom{n+1}{2j} B_{2j} N^{n+1-2j}.$$

Beweis. Aus (2.6), (2.1) folgert man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k^n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{N}\big(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)\big) = \frac{1}{n+1}\big(B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(1)\big)\\
&= \frac{1}{n+1}\big(B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(0)\big) = \frac{1}{n+1}\big(B_{n+1}(N) - B_{n+1}\big) + N^n\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} B_{n+1-j}\, N^j + N^n\\
&= \frac{N^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}N^n + \frac{1}{n+1}\sum_{1\le j\le \frac{n}{2}}\binom{n+1}{2j} B_{2j}\, N^{n+1-2j}.
\end{aligned}$$

□

Damit erhält man speziell

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k^3 &= \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2,\\
\sum_{k=1}^{N} k^4 &= \frac{1}{30}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1).
\end{aligned}$$

(2.8) Satz. *Sind $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, so erfüllt ein Polynom $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ genau dann die Funktionalgleichung*

$$P(x+1) - P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$P(x) = c + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{k} B_k(x).$$

Beweis. Das angegebene Polynom erfüllt nach (2.7) die Funktionalgleichung. Sei nun $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ eine beliebige Lösung. Dann erfüllt das Polynom

$$Q(x) := P(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{k} B_k(x)$$

die Funktionalgleichung

$$Q(x+1) = Q(x).$$

Hätte $Q(x)$ einen positiven Grad m, so kommt man nach $(m-1)$-maligen Differenzieren auf ein Polynom von einem Grad ≤ 1, also der Form $\alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, mit dieser Eigenschaft. Das ist ein Widerspruch. Also ist $Q(x)$ konstant. □

Wir beweisen noch eine Orthogonalitätsrelation.

(2.9) Satz. *a) Es gilt für alle $m \in \mathbb{N}$*

$$\int_0^1 B_m(x)\, dx = 0, \qquad \int_0^1 B_m(x) B_1(x)\, dx = \frac{1}{m+1} B_{m+1}.$$

b) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \not\equiv n \pmod 2$ gilt

$$\int_0^1 B_m(x) B_n(x)\, dx = 0.$$

Beweis. Aus (2.6) b) und c) ergibt sich

$$\int_0^1 B_m(x)\, dx = \frac{1}{n+1} B_{m+1}(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}\big(B_{m+1}(1) - B_{m+1}(0)\big) = 0.$$

Für $m \geq n \geq 1$ folgt mit partieller Integration und (2.6)

$$\int_0^1 B_m(x) B_n(x)\, dx = \frac{1}{m+1} B_{m+1}(x) B_n(x)\Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 B_{m+1}(x) B_{n-1}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{m+1}\left((-1)^{m+n+1} - 1\right) B_{m+1} B_n - \frac{n}{m+1} \int_0^1 B_{m+1}(x) B_{n-1}(x)\, dx.$$

Daraus folgt b) mit einer Induktion nach $\min\{m, n\}$. Für $n = 1$ folgt

$$\int_0^1 B_m(x) B_1(x)\, dx = \frac{-1}{2(m+1)}\big((-1)^m - 1\big) B_{m+1} = \frac{1}{m+1} B_{m+1}.$$

□

§3 LEGENDRE-Polynome

In diesem Paragrafen führen wir eine weitere Klasse von Polynomen ein, die in der Physik eine Rolle spielen und wiederum bestimmte Orthogonalitätskriterien erfüllen.

Aus den Übungen zur Analysis I wiederholen wir

$$(*) \qquad \begin{aligned} &(1+y)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} y^n, \quad -1 < y < 1, \ r \in \mathbb{R}, \\ &\binom{r}{0} := 1, \quad \binom{r}{n} := \frac{r\cdot(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-n+1)}{n!}, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Als verallgemeinerten Binomialkoeffizienten hat man insbesondere

$$(**) \qquad \binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

(3.1) Definition. Die LEGENDRE-*Polynome* $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, in $\mathbb{Q}[x]$ sind definiert durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Also hat man insbesondere

$$(1) \qquad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3-3x).$$

(3.2) Lemma. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}\, x^{n-2k}, \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

P_n ist ein gerades (bzw. ungerades) Polynom vom Grad n, falls n gerade (bzw. ungerade) ist.

Beweis. Mit der binomischen Formel folgt

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{2n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}\, x^{n-2k}. \end{aligned}$$

Also tauchen in $P_n(x)$ nur gerade (bzw. ungerade) Exponenten von x auf, wenn n gerade (bzw. ungerade) ist. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Die meisten der weiteren nicht-trivialen Ergebnisse beruhen auf der Bestimmung der erzeugenden Funktion.

(3.3) Satz. *Für alle $x, t \in \mathbb{R}$ mit $|t^2 - 2xt| < 1$ gilt*

$$w(x,t) := (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Beweis. Aus (∗) erhält man für $|t^2 - 2xt| < 1$ mit der binomischen Formel

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (t^2 - 2xt)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{2k} (-2xt)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)! x^{n-k}}{2^{n+k} n! k! (n-k)!} t^{n+k}. \end{aligned}$$

Da man wegen der absoluten Konvergenz umordnen darf, folgt daraus

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x) t^m, \\ A_m(x) &= \sum_{\substack{(n,k),\, k \le n \\ n+k=m}} \frac{(-1)^k (2n)!}{2^{n+k} n! k! (n-k)!} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{2^m k! (m-k)! (m-2k)!} x^{m-2k} \\ &= P_m(x), \end{aligned}$$

wenn man (3.2) verwendet. □

Als Folgerung notieren wir das

(3.4) Korollar. *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_n(0) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } n \textit{ ungerade}, \\ \binom{-1/2}{n/2}, & \textit{falls } n \textit{ gerade}. \end{cases}$$

Beweis. Man setzt $x = 1, -1, 0$ in (3.3) ein und vergleicht die Koeffizienten von t^n auf beiden Seiten. □

Für festes x können wir die Funktion w nach t differenzieren und erhalten für alle hinreichend kleinen x, t

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) + (t - x) w(x,t) = 0.$$

Setzt man auf beiden Seiten die Potenzreihenentwicklung in t aus (3.3) ein, so folgt

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n+(t-x)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=0.$$

Vergleicht man die Koeffizienten von t^n, so ergibt sich

$$P_1(x)-xP_0(x)=0$$

und

$$(n+1)P_{n+1}(x)-2xnP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)+P_{n-1}(x)-xP_n(x)=0,\quad n\geq 1.$$

Damit haben wir das

(3.5) Korollar. *Die* LEGENDRE-*Polynome erfüllen die Rekursionsbedingungen*

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x$$

und

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0\quad \textit{für}\ n\geq 1.$$

Mit (3.3) verifiziert man für festes t und hinreichend kleine x die Identität

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial x}(x,t)-tw(x,t)=0.$$

Setzt man die Reihenentwicklungen ein, so folgt

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^{n+1}=0,\ \ n\geq 1.$$

Vergleicht man die Koeffizienten von t^{n+1}, so folgt

$$P_0'(x)=0,\quad P_1'(x)-P_1(x)-2xP_0'(x)=0$$

und

$$(**)\qquad P_{n+1}'(x)-2xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)-P_n(x)=0,\quad n\geq 1.$$

Nun differenziert man die Rekursionsformel in (3.5)

$$(n+1)P_{n+1}'(x)-(2n+1)P_n(x)-(2n+1)xP_n'(x)+nP_{n-1}'(x)=0.$$

Setzt man für $P_{n-1}'(x)$ den Wert aus $(**)$ ein, folgt a) in

(3.6) Korollar. *Es gelten die Rekursionsformeln für alle* $n\in\mathbb{N}$:

a) $P_{n+1}'(x)-xP_n'(x)=(n+1)P_n(x)$,

b) $xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)=nP_n(x)$,

c) $P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$,

d) $(1-x^2)P_n'(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x)$.

Beweis. b) Setzt man den Wert von $P'_{n+1}(x)$ aus $(**)$ in a) ein, so ergibt sich die Formel in b).
c) Die Aussage ergibt sich durch Addition von a) und b).
d) Man benutzt a) für $n-1$ statt n und substituiert den Wert von $P'_{n-1}(x)$ aus b). □

Differenziert man d), so folgt

$$\big[(1-x^2)P'_n(x)\big]' = n\big[P'_{n-1}(x) - xP'_n(x) - P_n(x)\big] = -n(n+1)P_n(x),$$

wenn man b) verwendet. Das Ergebnis ist

(3.7) Korollar. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt $u(x) = P_n(x)$ die Differentialgleichung*

$$\big[(1-x^2)u'(x)\big]' + n(n+1)u(x) = 0.$$

Diese Differentialgleichung spielt in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle.

Im nächsten Schritt wollen wir die Orthogonalitätsrelationen bestimmen. Dazu nutzen wir (3.7) für $u = P_m$, multiplizieren mit P_n und subtrahieren die Gleichung, die aus (3.7) für $u = P_n$ multipliziert mit P_m entsteht

$$\big[(1-x^2)P'_m(x)\big]'P_n(x) - \big[(1-x^2)P'_n(x)\big]'P_m(x) + \big[m(m+1) - n(n+1)\big]P_m(x)P_n(x) = 0$$

bzw.

$$\big[(1-x^2)(P'_m(x)P_n(x) - P'_n(x)P_m(x))\big]' + (m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x) = 0.$$

Integration über $[-1,1]$ liefert

$$(m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = (1-x^2)(P'_m(x)P_n(x) - P'_n(x)P_m(x))\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

(3.8) Satz. *Die* LEGENDRE-*Polynome erfüllen die Orthogonalitätsbedingungen*

a) $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$ *für alle* $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

b) $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. b) Für $n = 0, 1$ ist die Behauptung klar wegen

$$\int_{-1}^{1} P_0^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} P_1^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Sei also $n \geq 2$. Wir verwenden (3.5) für $n-1$ statt n und multiplizieren die Gleichung mit $(2n+1)P_n(x)$:

$$n(2n+1)P_n^2(x) - (2n-1)(2n+1)xP_{n-1}(x)P_n(x) + (n-1)(2n+1)P_{n-2}(x)P_n(x) = 0.$$

Multipliziert man (3.5) mit $(2n-1)P_{n-1}(x)$, so folgt

$$(n+1)(2n-1)P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)-(2n+1)(2n-1)xP_n(x)P_{n-1}(x)+n(2n-1)P_{n-1}^2(x)=0.$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen ist

$$\begin{aligned} &n(2n+1)P_n^2(x)+(n-1)(2n+1)P_{n-2}(x)P_n(x)-(n+1)(2n+1)P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) \\ &\quad - n(2n-1)P_{n-1}^2(x)=0. \end{aligned}$$

Integriert man über $[-1,1]$ und verwendet a), so folgt

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\,dx.$$

Mit einer Induktion nach n ergibt sich die Behauptung. □

Wir wollen nun auch komplexwertige Funktionen differenzieren und integrieren. Für $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, $f=u+iv$, $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ definieren wir

$$f'(t):=u'(t)+iv'(t),\qquad \int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt,$$

sofern die rechte Seite jeweils existiert. Ist $g=u_1+iv_1$, so hat man

$$\begin{aligned} (f\cdot g)' &= (uu_1-vv_1)'+i(uv_1+u_1v)' \\ &= (u'u_1+uu_1'-v'v_1-vv_1')+i(u'v_1+uv_1'+u_1'v+u_1v') \\ &= (u'u_1-v'v_1)+i(u'v_1+u_1'v)+(uu_1'-vv_1')+i(uv_1'+u_1v') \\ &= (u'+iv')\cdot(u_1+iv_1)+(u+iv)\cdot(u_1'+iv_1') = f'\cdot g+f\cdot g'. \end{aligned}$$

Also gilt die Produktregel auch für komplexwertige Funktionen.

(3.9) Satz. *Für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt*

a) $P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi$, $x\in\mathbb{R}$.

b) $-1\le P_n(x)\le 1$ *für* $-1\le x\le 1$.

Dabei kommt es in a) nicht auf die Wahl der Wurzel für $|x|<1$ an.

Beweis. a) Für $x\in\mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}\sqrt{x^2-1}^{\,k}\cdot\int_0^1 \cos^n\varphi\,d\varphi. \end{aligned}$$

Nach VI(2.9) f) und (∗∗) gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{i^k}{\pi}\int_0^\pi \cos^k \varphi \, d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \binom{-1/2}{k/2}, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Also hat man

$$Q_n(x) = \sum_{0 \le j \le n/2} \binom{n}{2j} x^{n-2j}(1-x^2)^j \binom{-1/2}{j}$$

und damit die Unabhängigkeit von der Wahl der Wurzel. Insbesondere gilt

$$Q_0(x) = 1 = P_0(x), \quad Q_1(x) = x = P_1(x).$$

Nun verifiziert man $Q_n(x) = P_n(x)$ mit einer Induktion nach n.
b) Da das Integral reell ist, folgt mit der Dreiecksungleichung für Integrale VI(1.19) für $-1 \le x \le 1$ wegen

$$\begin{aligned} |x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi| &= |x + i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi| \\ = \sqrt{x^2 + (1-x^2)\cos^2\varphi} &\le \sqrt{x^2 + (1-x^2)} = 1 \end{aligned}$$

sogleich

$$\begin{aligned} |P_n(x)| &= \left| \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n \, d\varphi \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{Re}\,(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n \, d\varphi \right| \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left| \operatorname{Re}\,(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n \right| \, d\varphi \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left| (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n \right| \, d\varphi \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\varphi = 1. \end{aligned}$$

□

§4 LAGUERRE-Polynome

(4.1) Definition. Die LAGUERRE-*Polynome* $L_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind definiert durch

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Konkret erhalten wir

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x + 1, \quad L_2(x) = \tfrac{1}{2}(x^2 - 4x + 2). \tag{1}$$

Dass es sich wirklich um Polynome handelt, zeigen wir in dem

(4.2) Lemma. *$L_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n mit $L_n(0) = 1$ und*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \in \mathbb{Q}[x].$$

Beweis. Wir verwenden die LEIBNIZsche Formel

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

und erhalten daraus

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{n!} e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(e^{-x}) \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^n \\ &= \frac{1}{n!} e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k. \end{aligned}$$

□

Wie in den vorherigen Paragrafen studieren wir nun die erzeugende Funktion.

(4.3) Satz. *Für alle $x, t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$ gilt*

$$w(x,t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n.$$

Beweis. Mit der Exponentialreihe und III(4.11) folgt für $x, t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k t^k \cdot \frac{1}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} t^{k+r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{n-k} x^k \right) t^n, \end{aligned}$$

da man wegen der absoluten Konvergenz umordnen darf. Dann folgt die Behauptung aus (4.2). □

Wir erhalten wiederum verschiedene Rekursionsformeln.

(4.4) Satz. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

a) $(n+1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$,

b) $L_n'(x) - L_{n-1}'(x) + L_{n-1}(x) = 0$,

c) $(x - n - 1)L_n'(x) + (n+1)L_{n+1}'(x) + (2n + 2 - x)L_n(x) + (n+1)L_{n+1}(x) = 0$,

d) $xL_n'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$.

Beweis. a) Man verifiziert für $x, t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$

$$(1-t)^2 \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) + (x - (1-t))w(x,t) = 0,$$

also

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}(x) t^n + (x - 1 + t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = 0.$$

Ein Koeffizientenvergleich von t^n auf beiden Seiten liefert die Behauptung.
b) Man verifiziert leicht für $x, t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$

$$(1-t) \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) + t w(x,t) = 0,$$

also

$$(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x) t^n = 0.$$

Ein Koeffizientenvergleich von t^n liefert die Behauptung.
c) Man verwendet a) und die differenzierte Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} nL_{n-1}(x) &= -(n+1)L_{n+1}(x) + (2n+1-x)L_n(x), \\ nL_{n+1}'(x) &= -(n+1)L_{n+1}'(x) + (2n+1-x)L_n'(x) - L_n(x). \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in b) ein, so folgt die Behauptung.
d) Für $n = 1$ ist die Behauptung klar nach (1). Man verwendet c) für $n-1$ statt $n \geq 2$:

$$(x-n)L_{n-1}'(x) = -nL_n'(x) + (x-2n)L_{n-1}(x) - nL_n(x).$$

Einsetzen in b) liefert die Behauptung. □

Wir leiten noch eine Differentialgleichung her.

(4.5) Korollar. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0.$$

Beweis. Für $n = 0$ ist die Behauptung wegen $L_0 \equiv 1$ klar. Sei $n \geq 1$. Die Differentiation von (4.4) d) liefert

$$\begin{aligned} xL_n''(x) &= (n-1)L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) \\ &= -L_n'(x) - nL_{n-1}(x) \\ &= (x-1)L_n'(x) - nL_n(x), \end{aligned}$$

wenn man (4.4) b) und (4.4) d) verwendet. □

Weil die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom existieren die uneigentlichen RIEMANN-Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} P(x)\, dx \quad \text{für alle } \ P(x) \in \mathbb{R}[x].$$

(4.6) Satz. *Es gilt*

a) $\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = 0$ *für alle* $n \neq m$.

b) $\int_0^\infty e^{-x} L_n^2(x)\, dx = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. a) Die Funktion

$$u_n(x) := e^{-x/2} L_n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{N}_0,$$

erfüllt nach (4.5) die Differentialgleichung

$$(x u_n'(x))' + (n + \tfrac{1}{2} - \tfrac{x}{4}) u_n(x) = 0,$$

bzw.

$$(x u_m'(x))' + (m + \tfrac{1}{2} - \tfrac{x}{4}) u_m(x) = 0.$$

Nun multipliziert man die erste Gleichung mit $u_m(x)$, die zweite mit $u_n(x)$ und subtrahiert

$$(x u_n'(x))' u_m(x) - (x u_m'(x))' u_n(x) + (n-m) u_n(x) u_m(x) = 0$$

bzw.

$$\big[x(u_n'(x) u_m(x) - u_n(x) u_m'(x))\big]' + (n-m) u_n(x) u_m(x) = 0.$$

Integration über $[0, \infty]$ führt zu

$$(n-m) \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = (n-m) \int_0^\infty u_n(x) u_m(x)\, dx$$
$$= \lim_{R\to\infty} x\big(u_n'(x) u_m(x) - u_n(x) u_m'(x)\big)\Big|_0^R = 0.$$

Daraus erhält man die Behauptung.
b) Wir verwenden eine Induktion nach n. Für $n = 0, 1$ erhält man

$$\int_0^\infty e^{-x} L_0^2(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} L_1^2(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x}(x^2 - 2x + 1)\, dx = 1.$$

Sei also $n \geq 2$.
Ersetzt man n durch $n-1$ in (4.4) a) und multipliziert mit $L_n(x)$, so folgt

$$n L_n^2(x) + (x - 2n + 1) L_{n-1}(x) L_n(x) + (n-1) L_{n-2}(x) L_n(x) = 0.$$

Davon subtrahieren wir die Gleichung (4.4) a) multipliziert mit $L_{n-1}(x)$ und erhalten

$$nL_n^2(x)-nL_{n-1}^2(x)-(n+1)L_{n+1}(x)L_{n-1}(x)+2L_n(x)L_{n-1}(x)+(n-1)L_n(x)L_{n-2}(x)=0.$$

Man multipliziert mit $\frac{1}{n}e^{-x}$ und integriert über $[0,\infty]$. Mit a) folgt

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n^2(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-x}L_{n-1}^2(x)\,dx.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich die Behauptung. □

§5 HERMITE-Polynome

(5.1) Definition. Die HERMITE-*Polynome* $H_n(x)$, $n\in\mathbb{N}_0$, in $\mathbb{R}[x]$ sind definiert durch

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Der Formel entnehmen wir direkt

$$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x,\quad H_2(x)=4x^2-2,\quad H_3(x)=8x^3-12x.$$

(5.2) Satz. *Für $x,t\in\mathbb{R}$ gilt*

$$w(x,t)=e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^\infty\frac{H_n(x)}{n!}\,t^n.$$

Beweis. Aus der Exponentialreihe folgt, dass $w(x,t)=e^{2xt}\cdot e^{-t^2}$ sich für festes x als Potenzreihe in t darstellen lässt. Also gilt

$$w(x,t)=e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}w(x,t)\right]_{t=0}t^n.$$

Nun folgt

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}w(x,t)\bigg|_{t=0}=e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\,e^{-(x-t)^2}\bigg|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d}{du^n}\,e^{-u^2}\bigg|_{u=x}=H_n(x).$$ □

Als Folgerung erhält man das

(5.3) Korollar. *$H_n(x)$ ist ein gerades bzw. ungerades Polynom vom Grad n, falls n gerade bzw. ungerade ist. Es gilt*

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

und

$$H_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ (-1)^{n/2}\frac{n!}{(n/2)!}, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beweis. Aus (5.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt} \cdot e^{-t^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(2xt)^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{-(1)^l}{l!} t^{2l} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{0 \le l \le n/2} \frac{(-1)^l}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l} \right) t^n, \end{aligned}$$

da man wegen der absoluten Konvergenz beliebig umordnen darf. Der Vergleich der Koeffizienten von t^n liefert die Behauptung. □

Wir beschreiben die Rekursionsformeln in dem

(5.4) Satz. *Für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt*

a) $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$,

b) $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$,

c) $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

Beweis. a) Mit (5.2) verifiziert man

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x,t) - (2x - 2t)w(x,t) = 0,$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n - (2x-2t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = 0.$$

Vergleicht man die Koeffizienten von t^n, so folgt die Behauptung.
b) Man verifiziert

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x,t) - 2tw(x,t) = 0,$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n = 0.$$

Man vergleicht wieder die Koeffizienten von t^n.
c) Man benutzt a) und b). □

Als Folgerung erhalten wir das

(5.5) Korollar. *Die Funktion*

$$u_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

erfüllt die Differentialgleichung

$$u_n''(x) + (2n + 1 - x^2) u_n(x) = 0.$$

Beweis. Man setzt (5.4) c) ein. $\square$

Weil die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, existiert das uneigentliche RIEMANN-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} P(x)\, dx \quad \text{für alle } P(x) \in \mathbb{R}[x].$$

(5.6) Satz. *Es gilt*

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 0$ *für alle* $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n \neq m$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. a) Mit (5.5) erhält man

$$\frac{d}{dx}\big(u_n'(x) u_m(x) - u_n(x) u_m'(x)\big) = u_n''(x) u_m(x) - u_n(x) u_m''(x) = 2(n - m) u_n(x) u_m(x).$$

Aus $\lim_{x\to\pm\infty} u_n'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} u_n(x) = 0$ folgert man

$$0 = 2(n - m) \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x) u_m(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx.$$

b) Für $n = 0, 1$ gilt (vgl. X(3.7))

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 4x^2 e^{-x^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} -2x e^{-x^2}\Big|_{-R}^{R} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\sqrt{\pi}.$$

Sei also $n \geq 2$. Zunächst verwendet man (5.4) a) für $n - 1$ statt n und multipliziert mit $H_n(x)$

$$H_n^2(x) - 2x H_{n-1}(x) H_n(x) + 2(n - 1) H_{n-2}(x) H_n(x) = 0.$$

Davon subtrahiert man die mit $H_{n-1}(x)$ multiplizierte Gleichung (5.4) a)

$$H_n^2(x) - 2nH_{n-1}^2(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)H_n(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) = 0.$$

Man multipliziert mit e^{-x^2} und integriert über $(-\infty, \infty)$. Mit a) folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x)\, dx.$$

Mit einer Induktion ergibt sich die Behauptung. □

§6 BERNSTEIN-Polynome

Ohne Beweis haben wir in der Analysis II den Satz zitiert, dass sich jede stetige Funktion auf einem Kompaktum gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt. Dazu benötigt man die so genannten BERNSTEIN-Polynome.

(6.1) Definition. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt

$$B_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \in \mathbb{R}[x], \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

das zugehörige n-te BERNSTEIN-*Polynom*.

Offenbar ist $B_n(f)(x)$ ein Polynom von einem Grad $\leq n$.

(6.2) Beispiele. a) Für $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, gilt

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1,$$

also $B_n(f) = f$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
b) Für $f(x) = x$, $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x, \end{aligned}$$

also $B_n(f) = f$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Für $f(x) = x(1-x)$, $x \in [0,1]$, und $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x(1-x) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-2-(k-1)} \\ &= (1 - \tfrac{1}{n}) x(1-x). \end{aligned}$$

Also stimmen $B_n(f)$ und f bis auf den Faktor $1 - \frac{1}{n}$ überein.

Als Folgerung notieren wir das

(6.3) Lemma. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ gilt*

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

Beweis. Mit (6.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - (2x-1) \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x^2 - (2x-1)x - \left(1 - \frac{1}{n} \right) x(1-x) \\ &= \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}, \end{aligned}$$

da $x(1-x) - \frac{1}{4} = -(x - \frac{1}{2})^2 \leq 0$, also $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. □

Als Anwendung formulieren wir unser zentrales Ergebnis

(6.4) Satz. *Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, so konvergiert die zugehörige Folge $(B_n(f))_{n \geq 0}$ der* BERNSTEIN*-Polynome auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Da $[0,1]$ kompakt ist, ist f nach IV(3.13) gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon > 0$ existiert somit ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in [0,1] \quad \text{mit} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Da $|f|$ auf dem Kompaktum $[0,1]$ ein Maximum annimmt, gibt es ein $c > 0$, so dass

$$|f(x)| \leq c \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1].$$

Sei nun $x \in [0,1]$ beliebig, aber fest. Wir zerlegen die Menge $\{0,\ldots,n\}$ in

$$A_n := \left\{k;\ 0 \le k \le n,\ |x - \tfrac{k}{n}| < \delta\right\}, \qquad B_n := \left\{k;\ 0 \le k \le n,\ |x - \tfrac{k}{n}| \ge \delta\right\}.$$

Dann hat man

$$|f(x) - f(\tfrac{k}{n})| < \varepsilon \quad \text{für } k \in A_n, \qquad |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| \le |f(x)| + |f(\tfrac{k}{n})| \le 2c \quad \text{für } k \in B_n.$$

Nach Definition von B_n gilt $\delta^2 \le (x - \frac{k}{n})^2$, also

$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{2c}{\delta^2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \quad \text{für } k \in B_n.$$

Daraus erhalten wir mit (6.3) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\le \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\le \varepsilon \sum_{k\in A_n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \frac{2c}{\delta^2}\sum_{k\in B_n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\le \varepsilon + \frac{c}{2\delta^2 n}.
\end{aligned}$$

Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $c/2\delta^2 n < \varepsilon$ für alle $n \ge N$, also

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \le 2\varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N,\ x \in [0,1].$$

Demnach konvergiert $(B_n(f))_{n\ge 0}$ gleichmäßig gegen f. $\square$

Nimmt man $f(x) = x^2 = x - x(1-x)$, so impliziert (6.2)

$$B_n(f)(x) = x - \left(1 - \frac{1}{n}\right)x(1-x) = \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2.$$

Mit der bijektiven Abbildung

$$\varphi : [0,1] \to [a,b], \quad t \mapsto a + t(b-a),$$

folgt daraus der

(6.5) WEIERSTRASSscher Approximationssatz. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine Folge $(P_n(x))_{n\ge 0}$ von reellen Polynomen, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.*

§7 Trigonometrische Polynome und FOURIER-Reihen

Wir beschäftigen uns in diesem Paragrafen mit 2π-periodischen Funktionen, also Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(7.1) Definition. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ein *trigonometrisches Polynom*, wenn es $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$(*) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Speziell ist jedes trigonometrische Polynom natürlich 2π-periodisch.

Zuerst geben wir ein explizites

(7.2) Beispiel. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2} e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = \frac{1}{2} e^{-inx} \frac{1 - e^{(2n+1)ix}}{1 - e^{ix}} = \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\
&= \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

Zunächst formulieren wir eine Eindeutigkeitsaussage.

(7.3) Lemma. *Die Koeffizienten a_k, b_k in $(*)$ sind eindeutig bestimmt und werden gegeben durch*

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Analysis II bekannten Orthogonalitätsrelationen für $k, l \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx = 0 \quad \text{für } \ k \neq l,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)\,dx = 0 \quad \text{für alle } \ k, l,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(kx)\,dx = \pi \quad \text{für alle } \ k \geq 1. \qquad \square$$

Es ist häufig zweckmäßig, komplexwertige trigonometrische Polynome zu betrachten, also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ in $(*)$. Wegen $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ hat man

$$(**) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx},$$
$$c_k = \tfrac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \tfrac{1}{2}(a_k + ib_k), \ \ k \geq 1, \quad c_0 = \tfrac{1}{2}a_0.$$

Dann ist es zweckmäßig, Integrale komplexwertiger Funktionen einzuführen. Für eine Funktion $f = u + iv : [a, b] \to \mathbb{C}$, also $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$, definiert man

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i \int_0^b v(t)\,dt \in \mathbb{C},$$

sofern die rechte Seite existiert. Für $f(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i\sin(mt)$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ hat man speziell

$$\int_a^b e^{imt}\,dt = \int_a^b \cos(mt)\,dt + i \int_a^b \sin(mt)\,dt = \frac{1}{m}\sin(mt)\Big|_a^b - \frac{i}{m}\cos(mt)\Big|_a^b$$
$$= \frac{1}{im}\, e^{imt}\Big|_a^b,$$
$$\int_0^{2\pi} e^{imt}\,dt = 0 \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Aus (7.2) und $(**)$ ergibt sich damit das

(7.4) Korollar. *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, ein trigonometrisches Polynom, so gilt*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Diesen Ansatz nutzen wir für eine allgemeine

(7.5) Definition. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die über $[0, 2\pi]$ RIEMANN-integrierbar ist. Dann heißen die Zahlen

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

die FOURIER-*Koeffizienten* von f und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

die FOURIER-*Reihe* von f.

Die Konvergenz der FOURIER-Reihe ist durch die Konvergenz der Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

definiert. I. Allg. wird die FOURIER-Reihe jedoch nicht konvergieren. Wenn sie konvergiert, ist der Grenzwert nicht notwendig $f(x)$.

(7.6) Lemma. *a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\lim_{|k|\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(kx) \, dx = \lim_{|k|\to\infty} \int_a^b f(x) \cos(kx) \, dx = 0.$$

b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und 2π-periodisch, so gilt für die FOURIER-*Koeffizienten*

$$\lim_{|k|\to\infty} a_k = \lim_{|k|\to\infty} b_k = \lim_{|k|\to\infty} c_k = 0.$$

Beweis. Für $k \neq 0$ folgt mit partieller Integration

$$\int_a^b f(x) \sin(kx) \, dx = -\frac{1}{k} f(x) \cos(kx) \Big|_a^b + \frac{1}{k} \int_a^b f'(x) \cos(kx) \, dx.$$

Weil f und f' als stetige Funktionen auf dem Kompaktum $[a, b]$ beschränkt sind, existiert ein $M > 0$, so dass

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(kx) \, dx \right| \leq \frac{2M}{|k|} + \frac{M(b-a)}{|k|} \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0.$$

Die übrigen Aussagen folgen analog. □

(7.7) Lemma. *Wenn die Reihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert, dann sind die γ_k die FOURIER-*Koeffizienten von f.*

Beweis. Da man wegen der gleichmäßigen Konvergenz Summation und Integration vertauschen darf, folgt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx} \right) e^{-ikx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \int_0^{2\pi} e^{i(m-k)x}\, dx = \gamma_k. \end{aligned} \qquad \square$$

Wir diskutieren ein

(7.8) Beispiel. Für $0 < x < 2\pi$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Wegen $\int_\pi^x \cos(kt)\, dt = \frac{\sin(kx)}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2}$$

aus (7.2) und somit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_\pi^x \cos(kt)\, dt = \int_\pi^x \left(\frac{\sin\big(n+1/2)t\big)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2} \right) dt \\ &= F_n(x) - \frac{1}{2}(x-\pi) \end{aligned}$$

mit

$$F_n(x) = \int_\pi^x \frac{1}{2\sin(t/2)} \sin((n+1/2)t)\, dt.$$

Nach (7.6) gilt wegen

$$\sin((n+1/2)t) = \sin(nt)\cdot\cos(t/2) + \cos(nt)\cdot\sin(t/2)$$

sogleich

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$$

und damit die Behauptung.

Für FOURIER-Reihen ist jedoch ein anderer Konvergenzbegriff angemessener. Dazu sei

$$V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch und über } [0,2\pi] \text{ RIEMANN-integrierbar}\}.$$

Dann ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Für $f, g \in V$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Man verifiziert direkt für $f, g, h \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

a) $\langle f+g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$, $\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$

b) $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$, $\langle f, \lambda g\rangle = \overline{\lambda}\langle f, g\rangle$

c) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$.

Für jedes $f \in V$ ist

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (f(x))^2\,dx \geq 0.$$

Aus $\langle f, f\rangle = 0$ können wir jedoch nicht $f \equiv 0$ folgern, wie das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \langle f, f\rangle = 0$$

zeigt. Die "Seminorm"

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x))^2\,dx}, \quad f \in V$$

erfüllt

a) $\|f\| \geq 0$ für alle $f \in V$

b) $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in V$

c) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ für alle $f, g \in V$.

Die Funktionen $e_k(x) := e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, in V erfüllen

$$\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl} \quad \text{für alle } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Sie bilden also ein *Orthonormalsystem.*

(7.9) Lemma. *Die Funktion $f \in V$ habe die* FOURIER-*Koeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Beweis. Mit $g := \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \in V$ erhält man

$$\langle g, f\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k \langle e_k, f\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{\langle f, e_k\rangle} = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \overline{\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2} = \langle f, g\rangle$$

$$\langle g, e_k\rangle = \sum_{l=-n}^{n} c_l \langle e_l, e_k\rangle = c_k$$

also

$$\langle g, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} \langle g, e_k\rangle = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|f-g\|^2 &= \langle f-g, f-g\rangle = \langle f, f\rangle - \langle f, g\rangle - \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2. \end{aligned}$$

□

Aus (7.6) ergibt sich

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \le \|f\|^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Grenzübergang $n \to \infty$ folgt der

(7.10) Satz über die BESSELsche Ungleichung. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die über $[0, 2\pi]$ RIEMANN-integrierbar ist. Dann erfüllen die FOURIER-Koeffizienten c_k von f die Ungleichnung*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \|f\|^2.$$

(7.11) Definition. Seien $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, 2π-periodische über $[0, 2\pi]$ RIEMANN-integrierbare Funktionen. Man sagt, dass $(f_n)_{n\ge 1}$ im *quadratischen Mittel gegen f konvergiert*, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0,$$

wenn also

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2 \, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die Konvergenz im quadratischen Mittel. Umgekehrt folgt aus der Konvergenz im quadratischen Mittel aber noch nicht einmal die punktweise Konvergenz.

(7.6) besagt, dass die FOURIER-Reihe von f genau dann im quadratischen Mittel gegen f konvergiert, wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2,$$

d. h. wenn die BESSELsche Ungleichung zu einer Gleichung wird. Die Gültigkeit dieser Gleichung nennt man *Vollständigkeitsrelation.*

(7.12) Lemma. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, so dass $f\big|_{[0,2\pi]}$ eine Treppenfunktion ist. Dann konvergiert die* FOURIER*-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f.*

Beweis. Wir behandeln zunächst den Spezialfall $a \in [0, 2\pi]$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < a, \\ 0 & \text{für } a \le x < 2\pi. \end{cases}$$

Dann berechnet man

$$c_0 = \frac{a}{2\pi}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-ikx}\, dx = \frac{i}{2\pi k}(e^{-ika} - 1) \quad \text{für } k \neq 0.$$

Für $k \neq 0$ hat man

$$|c_k|^2 = \frac{1}{4\pi^2 k^2} \left[(\cos(ka) - 1)^2 + \sin^2(ka)\right] = \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - \cos(ka)),$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(ka)}{\pi^2 k^2} \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ka)}{k^2} \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{(\pi - a)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{a}{2\pi}, \end{aligned}$$

wenn man (1.8) ausnutzt. Also gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \|f\|^2.$$

Daraus folgt die Konvergenz im quadratischen Mittel. Die gleiche Aussage gilt natürlich für

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x \le a, \\ 0 & \text{für } a < x < 2\pi. \end{cases}$$

Ist f eine beliebige Treppenfunktion, so gibt es Funktionen $f_1, \dots, f_r$ der oben beschriebenen Art sowie Konstanten $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, so dass

$$f(x) = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j f_j(x).$$

Bezeichnet S_n bzw. $S_{j,n}$ die n-te Partialsumme der FOURIER-Reihe von f bzw. f_j, so folgt

$$S_n = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j S_{j,n},$$

also

$$\|f - S_n\| = \left\| \sum_{j=1}^{r} \gamma_j (f_j - S_{j,n}) \right\| \le \sum_{j=1}^{r} |\gamma_j| \cdot \|f_j - S_{j,n}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

wenn man a) verwendet. □

Wir kommen nun zu unserem zentralen Ergebnis.

(7.13) Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, so dass f auf $[0, 2\pi]$ RIEMANN-integrierbar ist. Dann konvergiert die FOURIER-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f. Sind c_k die FOURIER-Koeffizienten von f, so gilt die Vollständigkeitsrelation*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \|f\|^2.$$

Beweis. Sei f ohne Einschränkung reellwertig und $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[0, 2\pi]$ mit den Eigenschaften

$$-1 \le \varphi \le f \le \psi \le 1, \qquad \int_0^{2\pi} \big(\psi(x) - \varphi(x)\big) \, dx \le \frac{\pi}{4}\varepsilon^2.$$

Für $g := f - \varphi$ gilt dann

$$|g|^2 \le (\psi - \varphi)^2 \le 2(\psi - \varphi),$$

also

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 \, dx \le \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x))^2 \, dx \le \frac{1}{4}\varepsilon^2.$$

Seien $S_{f,n}, S_{\varphi,n}, S_{g,n}$ die n-ten Partialsummen der FOURIER-Reihen von f, φ, g. Dann gilt

$$S_{f,n} = S_{\varphi,n} + S_{g,n}.$$

Nach (7.12) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|\varphi - S_{\varphi,n}\| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \ge N.$$

Nach (7.9) hat man
$$\|g - S_{g,n}\|^2 \leq \|g\|^2 \leq \tfrac{1}{4}\varepsilon^2.$$
Daher ergibt sich für alle $n \geq N$
$$\|f - S_{f,n}\| \leq \|\varphi - S_{\varphi,n}\| + \|g - S_{g,n}\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$
Damit konvergiert die FOURIER-Reihe im quadratischen Mittel gegen f. Die fehlende Aussage ergibt sich aus dem Zusatz zu (7.7). □

(7.14) Beispiel. Aus (7.8) wissen wir, dass die FOURIER-Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$
punktweise gegen die 2π-periodische Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(0) = 0, \quad f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für } 0 < x < 2\pi$$
konvergiert. Die Reihe konvergiert auf jedem Kompaktum in $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ gleichmäßig. Dazu betrachten wir das Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$. Für $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, $n \in \mathbb{N}$, gilt
$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$$
$$|S_n(x)| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| = \left|\frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1}\right| \leq \frac{2}{|e^{ix/2} - e^{-ix/2}|} = \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)}.$$
Für $m > n > 0$ hat man daher
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{s_k(x) - s_{k-1}(x)}{k}\right| \\ &= \left|\sum_{k=m}^{n} s_k(x)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{s_n(x)}{n+1} - \frac{s_{m-1}(x)}{m}\right| \\ &\leq \frac{1}{\sin(\delta/2)}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m}\right) \leq \frac{2}{m\sin(\delta/2)}.\end{aligned}$$
Dann folgt die gleichmäßige Konvergenz mit dem CAUCHY-Kriterium. Die Reihe
$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$
konvergiert wegen $\left|\frac{\cos(kx)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ und ist 2π-periodisch. Die Reihe der Ableitungen
$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{x - \pi}{2}$$

konvergiert auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig. Nach VII(2.7) ist F auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ differenzierbar mit

$$F'(x) = \frac{x-\pi}{2}, \quad \text{also} \quad F(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c.$$

Da F als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen nach VI(2.5) stetig ist, gilt

$$F(0) = F(2\pi) = \frac{\pi^2}{4} + c.$$

Nun gilt

$$\int_0^{2\pi} F(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c\,dx = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c.$$

Mit VII(2.7) erhält man

$$\int_0^{2\pi} F(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx = 0.$$

Daraus folgt $c = -\frac{\pi^2}{12}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

Für $x = 0$ hat man insbesonders

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(7.15) Beispiele. a) Wir betrachten die 2π periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < \pi, \\ -1 & \text{für } \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$$

Die FOURIER-Koeffizienten sind

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{-ikx}\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-ikx}\,dx \right), \quad k \ne 0$$

$$= \frac{1}{-2\pi i k} \left(e^{-ikx}\Big|_0^{\pi} - e^{-ikx}\Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{1}{-\pi i k}\left(e^{-\pi i k} - 1\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade}, \\ \frac{2}{\pi i k}, & \text{falls } k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Die FOURIER-Reihe von f lautet daher

$$\frac{2}{\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(e^{i(2n+1)x} - e^{-i(2n+1)x}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

Sie konvergiert im quadratischen Mittel, aber nicht punktweise gegen f.
b) Wir haben in (7.14) gesehen, dass für $0 \le x \le 2\pi$

$$\frac{(\pi-x)^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right).$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig. Somit stellt die FOURIER-Reihe die 2π-periodische Funktion dar, die auf $[0, 2\pi]$ mit $\frac{(\pi-x)^2}{4}$ übereinstimmt. Die Vollständigkeitsrelation liefert

$$\frac{\pi^4}{144} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\pi-x)^4}{16} = \frac{\pi^4}{80},$$

also

$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(7.16) Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, die stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Dann konvergiert die* FOURIER*-Reihe von f gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Es gibt eine Zerlegung $0 = t_0 < \ldots < t_r = 2\pi$, so dass $f\big|_{[t_{j-1},t_j]}$ stetig differenzierbar ist. Sei $\varphi_j : [t_{j-1}, b_j] \to \mathbb{R}$ die stetige Ableitung von $f\big|_{[t_{j-1},t_j]}$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die auf $[t_{j-1}, t_j]$ mit φ_j übereinstimmt für $j = 1, \ldots, r$. Für die FOURIER-Koeffizienten γ_k von φ gilt nach (7.7)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 \le \|\varphi\|^2 < \infty.$$

Für $k \neq 0$ lassen sich die FOURIER-Koeffizienten c_k von f durch partielle Integration aus den FOURIER-Koeffizienten von φ gewinnen:

$$\begin{aligned}
\int_{t_{j-1}}^{t} f(x)e^{-ikx}\,dx &= \int_{t_{j-1}}^{t} f(x)\cos(kx)\,dx - i\int_{t_{j-1}}^{t} f(x)\sin(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{k}\left(f(x)\sin(kx)\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j(x)\sin(kx)\,dx \right) \\
&\quad + \frac{i}{k}\left(f(x)\cos(kx)\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j(x)\cos(kx)\,dx \right) \\
&= \frac{i}{k}\left(f(x)e^{-ikx}\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(x)e^{-ikx}\,dx \right),
\end{aligned}$$

also

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x)e^{-ikx}\,dx$$
$$= \frac{i}{2\pi k}\sum_{j=1}^{r}\left(f(x)e^{-ikx}\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j}\varphi(x)e^{-ikx}\,dx\right)$$
$$= \frac{i}{2\pi k}\left(f(x)e^{-ikx}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\varphi(x)e^{-ikx}\,dx\right) = \frac{-i\gamma_k}{k}.$$

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt $|\alpha\beta| \le \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ nach der Dreiecksungleichung. Daraus ergibt sich

$$|c_k| = \left|\frac{-i\gamma_k}{k}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |\gamma_k|^2\right).$$

Aus der Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^2$ folgt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k| < \infty.$$

Die FOURIER-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ von f konvergiert damit absolut gleichmäßig gegen eine stetige Funktion g. Somit konvergiert die FOURIER-Reihe im quadratischen Mittel gegen f und g. Daraus folgt $\|f-g\| = 0$. Die Stetigkeit von f und g impliziert $f = g$.□

§8 CHEBYSHEV-Polynome

Wir untersuchen in diesem Paragrafen eine weitere Klasse von Orthogonalpolynomen.

(8.1) Definition. Die CHEBYSHEV-*Polynome erster Art* $T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind definiert durch

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mit der Definition verifiziert man

(1) $$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2-1, \quad T_3(x) = 4x^3-3x.$$

Dass es sich in (8.1) wirklich um Polynome handelt und dass es auf die Wahl der (komplexen) Wurzel für $|x| < 1$ nicht ankommt, zeigt das

(8.2) Lemma. *$T_n(x)$ ist ein gerades bzw. ungerades Polynom vom Grad n in $\mathbb{Z}[x]$, wenn n gerade bzw. ungerade ist. Es gilt*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k$$

sowie

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_n(0) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } n \textit{ ungerade,} \\ (-1)^{n/2}, & \textit{falls } n \textit{ gerade.} \end{cases}$$

Beweis. Die speziellen Werte folgen durch Einsetzen in die Definition. Mit der binomischen Formel liefert (8.1)

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\sqrt{x^2-1}^{\,k}(1+(-1)^k) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j} x^{n-2j}(x^2-1)^j.$$

Daraus liest man die fehlenden Aussagen ab. □

Die zentralen Eigenschaften formulieren wir in dem

(8.3) Satz. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

a) $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sqrt{x^2-1}\,T_n'(x) = \frac{n}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $f(x) = T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, *erfüllt die Differentialgleichung*

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + n^2 f(x) = 0.$$

d) $2T_n(x) = \dfrac{T_{n+1}'(x)}{n+1} - \dfrac{T_{n-1}'(x)}{n-1}$ *für* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

e) $T_n\left(\frac{1}{2}(x+x^{-1})\right) = \frac{1}{2}(x^n + x^{-n})$, $n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $|x| > 1$ zu beweisen, da es sich um Polynomidentitäten handelt.
a) Es gilt

$$\begin{aligned}
&T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) \\
&= \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - 2x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1} - 2x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left[2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2-1} - 2x^2 - 2x\sqrt{x^2-1} + 1\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left[2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2-1} - 2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1} + 1\right] = 0.
\end{aligned}$$

b) Für $n = 0$ ist die Behauptung klar nach (1). Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
&T_n'(x)\\
&= \frac{1}{2}\left[n\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)+n\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\right]\\
&= \frac{n}{2\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right].
\end{aligned}$$

c) Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial. Für $n \geq 1$ folgt mit b)

$$T_n''(x) = \frac{n^2 T_n(x)}{x^2-1} - \frac{n}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Daraus ergibt sich mit b) sofort

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

d) Mit b) erhält man sogleich

$$\begin{aligned}
&2T_n(x) - \frac{T_{n+1}'(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}'(x)}{n-1}\\
&= \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\\
&\quad - \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}-\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}}{2\sqrt{x^2-1}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

e) Mit (8.1) folgt direkt

$$\begin{aligned}
&T_n\left(\tfrac{1}{2}(x+x^{-1})\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{2}(x+x^{-1})+\sqrt{\tfrac{1}{4}(x+x^{-1})^2-1}\right)^n+\left(\tfrac{1}{2}(x+x^{-1})-\sqrt{\tfrac{1}{4}(x+x^{-1})^2-1}\right)^n\right]\\
&= \tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{2}(x+x^{-1})+\tfrac{1}{2}(x-x^{-1})\right)^n+\left(\tfrac{1}{2}(x+x^{-1})-\tfrac{1}{2}(x-x^{-1})\right)^n\right]\\
&= \tfrac{1}{2}(x^n+x^{-n}).
\end{aligned}$$

□

Nun untersuchen wir die Chebyshev-Polynome genauer auf $[-1, 1]$.

(8.4) Satz. *a) Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\begin{aligned} &T_n(\cos\varphi) = \cos(n\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \\ &T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \textit{für alle } \ x \in [-1,1], \\ &|T_n(x)| \leq 1 \quad \textit{für alle } \ x \in [-1,1]. \end{aligned}$$

b) Alle Nullstellen von $T_n(x)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, sind von erster Ordnung, liegen im Intervall* $[-1,1]$ *und werden gegeben durch*

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

c) Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$*,* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x).$$

d) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\begin{aligned} &T_n(\varepsilon \cosh\varphi) = \varepsilon^n \cosh(n\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \ \ \varepsilon = \pm 1, \\ &T_n(x) = (\operatorname{sgn} x)^n \cosh(n \operatorname{arcosh} x), \quad \textit{für alle } \ x \in \mathbb{R}, \ \ |x| \geq 1, \\ &|T_n(x)| > 1 \quad \textit{für alle } \ x \in \mathbb{R}, \ \ |x| > 1. \end{aligned}$$

Beweis. a) Nach (8.1) gilt

$$T_n(\cos\varphi) = \tfrac{1}{2}\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n\right] = \tfrac{1}{2}\left[e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}\right] = \cos(n\varphi).$$

Daraus folgen auch sofort die beiden anderen Gleichungen
b) Als Polynom vom Grad n hat $T_n(x)$ höchstens n Nullstellen. Die angegebenen Punkte sind nach a) Nullstellen. Also haben sie alle die Ordnung 1 und es gibt keine weiteren.
c) Es genügt die Behauptung für $|x| \leq 1$ zu beweisen, da es sich um eine Polynomidentität handelt. Für $x = \cos\varphi$ folgt mit a)

$$T_m(T_n(x)) = T_m(T_n(\cos\varphi)) = T_m(\cos(n\varphi)) = \cos(mn\varphi) = T_{mn}(cos\varphi) = T_{mn}(x).$$

d) Wegen $\cosh\varphi = \frac{1}{2}(e^\varphi + e^{-\varphi})$ impliziert (8.1)

$$\begin{aligned} &T_n(\cosh\varphi) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{2}(e^\varphi + e^{-\varphi}) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(e^\varphi + e^{-\varphi})^2 - 1}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}(e^\varphi + e^{-\varphi}) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(e^\varphi + e^{-\varphi})^2 - 1}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{2}(e^{n\varphi} + e^{-n\varphi}) = \cosh(n\varphi). \end{aligned}$$

Die anderen Identitäten folgen daraus mit (8.2) □

Mit (8.4) a) kann man auch die Stellen y_k bzw. z_k bestimmen, in denen $T_n\big|_{[-1,1]}$ sein Maximum bzw. Minimum annimmt. Sie werden gegeben durch

$$y_k = \cos\left(\frac{2k}{n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], \qquad z_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Nun untersuchen wir die erzeugende Funktion

(8.5) Satz. *Für alle $x, t \in \mathbb{R}$, $|x| \le 1$, $|t| < 1$ gilt*

$$w(x,t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n.$$

Beweis. Für alle $|x| \le 1$ gilt $|T_n(x)| \le 1$, so dass die geometrische Reihe eine konvergente Majorante der obigen Reihe ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n\right) \cdot (1 - 2xt + t^2) \\
&= T_0(x) + (T_1(x) - 2xT_0(x))\, t + \sum_{n=2}^{\infty} \left[T_n(x) - 2xT_{n-1}(x) + T_{n-2}(x)\right] t^n \\
&= 1 - xt,
\end{aligned}$$

wenn man (1) und (8.3) a) verwendet. □

Als Folgerung erhalten wir eine weitere explizite Darstellung der $T_n(x)$.

(8.6) Korollar. *Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-1-k)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

Beweis. Es genügt die Identität für $|x| \le \frac{1}{2}$ zu beweisen. Aus (8.5) folgt für $|x| \le \frac{1}{2}$, $|t| \le \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
w(x,t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} &= (1 - xt) \sum_{m=0}^{\infty} (2xt - t^2)^n \\
&= (1 - xt) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (2x)^{m-k} t^{m+k} \\
&= (1 - xt) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} (-1)^k (2x)^{n-2k} \right) t^n.
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (8.5) folgt daraus $T_0(x) = 1$ und für $n \ge 1$

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} (-1)^k (2x)^{n-2k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{[n-1/2]} \binom{n-1-k}{k} (-1)^k (2x)^{n-2k} \\
&= \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-1-k)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}
\end{aligned}$$

□

Im nächsten Schritt untersuchen wir die Orthogonalitätsrelationen. Dazu bemerken wir die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\, d\varphi = \int_{0}^{\pi} d\varphi = \pi. \tag{2}$$

Also existiert das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad \text{für jedes } \ p(x) \in \mathbb{R}[x].$$

(8.7) Satz. *Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0$, *falls* $m \neq n$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}$, *falls* $n \geq 1$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_0^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi.$

Beweis. Mit der Substitution $x = \cos\varphi$ erhält man aus (8.4) a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= \int_{0}^{\pi} \frac{T_m(\cos\varphi)T_n(\cos\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} \sin\varphi\, d\varphi \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos(m\varphi)\cos(n\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{falls } \ m \neq n, \\ \pi/2, & \text{falls } \ m = n \geq 1, \\ \pi, & \text{falls } \ m = n = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

□

Es gibt eine weitere Klasse von CHEBYSHEV-Polynomen.

(8.8) Definition. Die CHEBYSHEV-*Polynome zweiter Art* $U_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, werden gegeben durch

$$\sqrt{x^2-1}\, U_n(x) = \tfrac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}\right).$$

Damit haben wir

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1, \quad U_3(x) = 8x^3 - 4x. \tag{3}$$

Wörtlich wie im Beweis von (8.2) folgt das

(8.9) Lemma. *$U_n(x)$ ist ein gerades bzw. ungerades Polynom vom Grad n in $\mathbb{Z}[x]$, wenn n gerade bzw. ungerade ist. Es gilt*

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k$$

sowie

$$U_1(1) = n+1, \quad U_1(-1) = (-1)^n(n+1), \quad U_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ (-1)^{n/2}, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Grundlegende Rekursionsformeln und Zusammenhänge zwischen beiden Typen von Chebyshev-Polynomen beinhaltet das

(8.10) Lemma. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

a) $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$,

b) $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$,

c) $U_n(x) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k T_{n-k}(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$,

d) $U_{n+1}(x) = 2T_{n+1}(x) + U_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$,

e) $T_n(x) + U_{n-1}(x)\sqrt{x^2-1} = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. a) Die gleiche Rechnung wie in (8.3) a) liefert die Behauptung
b) Man trägt (8.9) ein.
c) Die erste Identität ergibt sich aus (8.3) b), die zweite daraus mit (8.6). Die letzte Identität ergibt sich, indem man für die $T_{n-k}(x)$ die Darstellung aus b) sowie (3) verwendet.
d) Wenn man b) einsetzt, folgt die Behauptung aus a).
e) Man trägt für $T_n(x)$ und $U_{n-1}(x)$ die Definitionen ein. □

Nun wiederum interessieren wir uns für die Restriktion auf $[-1, 1]$.

(8.11) Lemma. *a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$U_n(\cos\varphi) = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi.$$

b) Für alle $|x| \leq 1$, $|t| < 1$ gilt

$$u(x,t) := \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n.$$

c) Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{-1}^{1} U_m(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \pi/2 & \text{für } m = n. \end{cases}$$

Beweis. a) Nach (8.8) gilt

$$\begin{aligned} U_n(\cos\varphi) &= \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{n+1}}{2i\sin\varphi} = \frac{e^{i(n+1)\varphi} - e^{-i(n+1)\varphi}}{2i\sin\varphi} \\ &= \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin\varphi}. \end{aligned}$$

b) Für $|x| < 1$ ist die geometrische Reihe nach a) eine Majorante der rechts stehenden Reihe. Für $x = \pm 1$ verwende man (3). Dann folgt die Behauptung analog zu (8.5) aus (8.10) a) und (3).
c) Wegen a) gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} U_m(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int_{0}^{\pi} U_m(\cos\varphi) U_n(\cos\varphi) \sin^2\varphi \, d\varphi \\ &= \int_{0}^{\pi} \sin((m+1)\varphi) \sin((n+1)\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \pi/2 & \text{für } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

□

§9 Der Fundamentalsatz der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra ist damit die letzte noch nicht bewiesene Aussage der Analysis I. Er hat in seiner reellen Version auch große Bedeutung für die Schulmathematik, wenn man zum Beispiel die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen behandelt. Wir stellen einen Beweis vor, der mit den Methoden der Analysis I auskommt.

(9.1) Fundamentalsatz der Algebra. *Zu jedem nicht-konstanten Polynom*

$$p(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n \in \mathbb{C}[Z]$$

existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $p(c) = 0$.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall von n-ten Wurzeln, der auch für sich interessant ist.

(9.2) Lemma. *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $c^n = a$.*

Beweis. Wir verwenden eine Induktion nach n, wobei $n = 1$ trivial ist. Sei daher $n = 2$ und

$$a = u + iv, \quad c := \sqrt{\frac{1}{2}(|a| + u)} + i\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}(|a| - u)},$$

wobei $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ so gewählt ist, dass $v = \varepsilon|v|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{1}{2}(|a| + u) - \varepsilon^2\frac{1}{2}(|a| - u) + 2i\varepsilon\sqrt{\frac{1}{4}(|a|^2 - u^2)} \\ &= u + i\varepsilon\sqrt{v^2} = u + iv = a. \end{aligned}$$

Sei also $n > 2$. Ist $n = 2m$ gerade, so wählt man zunächst nach Induktionsvoraussetzung ein $b \in \mathbb{C}$ mit $b^m = a$ und dann nach dem bewiesenen Fall ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$c^2 = b, \quad \text{also} \quad c^n = a.$$

Sei daher n ungerade und ohne Einschränkung $|a| = 1$, da sonst $c^n = a/|a|$ auch

$$(\sqrt[n]{|a|}c)^n = a$$

impliziert. Wegen $(-c)^n = -c^n$ sei weiterhin $a \notin \mathbb{R}$. Wir wählen ein $d \in \mathbb{C}$ mit $d^2 = a$, also $d\overline{d} = |d|^2 = |a| = 1$ und betrachten das Polynom

$$p(X) = i[\overline{d}(X + i)^n - d(X - i)^n] = i(\overline{d} - d)X^n + \ldots \quad .$$

Wegen $\overline{p(x)} = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $p(X)$ ein reelles Polynom, das wegen $d \notin \mathbb{R}$ den ungeraden Grad n hat. Nach dem Zwischenwertsatz (vgl. IV(3.8)) hat p eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\overline{d}(\lambda + i)^n = d(\lambda - i)^n, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^n = \frac{d}{\overline{d}} = d^2 = a.$$

□

Das Lemma bedeutet, dass ein Polynom $Z^n - a$ stets eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Der nächste Beweisschritt ist enthalten in dem

(9.3) Lemma. *Zu jedem nicht-konstanten Polynom*

$$p(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n \in \mathbb{C}[Z]$$

existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$|\, p(c)\, | \le |\, p(z)\, | \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Sei $a_n \neq 0$. Wie im obigen Beweis von (9.1) schließt man $|p(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n|R^n$ für $|z| \geq R$. Weil die reellwertige stetige Funktion

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto |p(z)|$$

auf dem Kompaktum $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R\}$ ihr Minimum in c annimmt, erhält man das gesuchte c, wenn man

$$R \geq \sqrt[n]{2\frac{|p(0)|}{|a_n|}}$$

wählt. □

Von technischer Bedeutung ist das

(9.4) Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, $g(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ mit $g(0) = 0$ und*

$$h(Z) = 1 + bZ^k + Z^k g(Z) \in \mathbb{C}[Z].$$

Dann existiert ein $u \in \mathbb{C}$ mit $|h(u)| < 1$.

Beweis. Wir wählen nach (9.2) ein $d \in \mathbb{C}$ mit $d^k = -1/b$, also $bd^k = -1$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < t \leq 1$ gilt dann mit der Dreiecksungleichung

$$|\, h(td) \,| \leq |1 + b(td)^k \,| + |\, (td)^k g(td) \,| = 1 - t^k + t^k \,|\, d^k g(td) \,| \,.$$

Da g als Polynom stetig in 0 mit $g(0) = 0$ ist, existiert ein $0 < \delta < 1$ mit

$$|d^k g(td)| < \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad 0 < t < \delta,$$

also

$$|\, h(td) \,| < 1 - \frac{1}{2}t^k < 1 \quad \text{für} \quad 0 < t < \delta.$$

□

Nun haben wir alle Hilfsmittel für den

Beweis von (9.1). Wir wählen $c \in \mathbb{C}$ mit $|p(c)| \leq |\, p(z) \,|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ nach (9.3) und nehmen $p(c) \neq 0$ an. Mit $p(Z)$ ist auch

$$h(Z) := \frac{p(c+Z)}{p(c)} = 1 + b_k Z^k + \ldots + b_n Z^n, \quad b_k \neq 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

nicht konstant. Nun kann man (9.4) anwenden und erhält ein $u \in \mathbb{C}$ mit $|h(u)| < 1$, d. h. $|p(c+u)| < |p(c)|$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von c und es folgt $p(c) = 0$. □

Nun wollen wir Polynome zerlegen. Als ersten Schritt erhalten wir das

(9.5) Lemma. *Sei $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{C}$ mit $p(c) = 0$. Dann existiert genau ein Polynom $q(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ vom Grad $n-1$ mit*

$$p(Z) = (Z - c) \cdot q(Z).$$

Beweis. Sei $p(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$, $a_n \neq 0$. Nach der Summenformel für endliche geometrische Reihen gilt

$$Z^r - c^r = (Z - c) \cdot q_r(Z), \quad q_r(Z) = Z^{r-1} + Z^{r-2}c + \ldots + c^{r-1}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Aus $p(c) = 0$ ergibt sich

$$p(Z) = p(Z) - p(c) = \sum_{r=1}^{n} a_r (Z^r - c^r) = (Z - c) \cdot q(Z), \quad q(Z) = \sum_{r=1}^{n} a_r q_r(Z).$$

Aufgrund von $a_n \neq 0$ hat $q(Z)$ den Grad $n - 1$. Wegen

$$q(z) = \frac{p(z)}{z - c} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq c,$$

ist $q(Z)$ durch $p(Z)$ und c eindeutig bestimmt. □

Mit einer Induktion erhalten wir daraus das

(9.6) Korollar. *a) Jedes Polynom $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine Darstellung*

$$p(Z) = \alpha(Z - a_1) \cdot \ldots \cdot (Z - a_n), \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{C}, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Dabei sind α und bis auf die Reihenfolge auch $a_1, \ldots, a_n$ eindeutig bestimmt.
b) Die irreduziblen Polynome über $\mathbb{C}$ sind genau diejenigen vom Grad 1, d. h. $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Eine reelle Version des Fundamentalsatzes der Algebra beinhaltet das

(9.7) Korollar. *a) Jedes Polynom $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine Darstellung*

$$p(X) = \alpha(X - a_1) \cdot \ldots \cdot (X - a_r) \cdot q_1(X) \cdot \ldots \cdot q_s(X),\ 0 \neq \alpha \in \mathbb{R},\ a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R},$$
$$q_j(X) = X^2 + b_j X + c_j,\ b_j, c_j \in \mathbb{R},\ b_j^2 - 4c_j < 0,\ 1 \leq j \leq s,\ r + 2s = n.$$

Dabei sind α und jeweils bis auf die Reihenfolge $a_1, \ldots, a_r$ und $q_1(X), \ldots, q_s(X)$ eindeutig bestimmt.
b) Die irreduziblen Polynome über $\mathbb{R}$ sind genau diejenigen vom Grad 1 sowie diejenigen von Grad 2 ohne reelle Nullstelle.

Beweis. Wir fassen p als komplexes Polynom auf und betrachten die Zerlegung gemäß (9.6). Weil die Koeffizienten von p reell sind, gilt $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Also ist mit $z = u + iv \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{R}$, auch $\overline{z} = u - iv$ eine von z verschiedene Nullstelle. Wegen $v \neq 0$ hat man

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - (z + \overline{z})X + z\overline{z} = X^2 - 2uX + (u^2 + v^2) \in \mathbb{R}[X],$$
$$(2u)^2 - 4(u^2 + v^2) = -4v^2 < 0.$$

Umgekehrt hat ein Polynom $X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ mit $b^2 - 4c < 0$ auch keine reelle Nullstelle, sondern zwei konjugiert komplexe. Damit führt jede Darstellung in (9.7) auf eine in (9.6), so dass auch die Eindeutigkeit folgt. □

Als Folgerung aus (9.6) erhält man das

(9.8) Korollar. *Ein Polynom $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n (komplexe) Nullstellen.*

Wir können Polynome auch benutzen, um Funktionen an verschiedenen Stellen zu approximieren.

(9.9) Satz. *Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$, so gibt es genau ein Polynom $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ von einem Grad $< n$ mit der Eigenschaft*

$$p(a_j) = w_j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n,$$

nämlich

$$(*) \qquad p(z) = \sum_{k=1}^{n} w_k \prod_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} \frac{z - a_j}{a_k - a_j}.$$

Beweis. Die Existenz folgt aus $(*)$. Zur Eindeutigkeit betrachtet man die Differenz zweier solcher Polynome, die in $a_1, \ldots, a_n$ Nullstellen hat und nach (9.8) das Nullpolynom ist. □

Man nennt $(*)$ das Lagrange*sche Interpolationspolynom.* Es ist reell, wenn $a_1, \ldots, a_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ reell sind und hat eine Darstellung

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} w_k \frac{q(z)}{q'(a_k) \cdot (z - a_k)}, \quad z \ne a_1, \ldots, a_n,$$

falls

$$q(z) = (z - a_1) \cdot \ldots \cdot (z - a_n).$$

Literaturverzeichnis

[1] G. Andrews, R. Askey, R. Roy: Special Functions. Cambridge University Press. Cambridge 1999.

[2] A. Krieg: Analysis I. Skript, RWTH Aachen 2007.

[3] A. Krieg: Analysis II. Skript, RWTH Aachen 2008.

[4] N.N. Lebedev: Special Functions and Their Applications. Dover Publications, New York 1972.

Index